

FR1 – Notion d'équation différentielle. Fonction exponentielle.

OBJECTIFS DU CHAPITRE

FR1-1 Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle

FR1-2 Connaître et appliquer les propriétés de la fonction exponentielle

FR1-3 Etudier une fonction mettant en jeu la fonction exponentielle

FR1-4 Résoudre une équation, une inéquation mettant en jeu la fonction exponentielle.

FR1-5 Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$ ou $y' = ay + b$ ($a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ fixés) ou s'y ramenant

I La fonction exponentielle comme solution du problème $y' = y$ et $y(0) = 1$. Propriétés immédiates

A Problème différentiel $y' = y$ et $y(0) = 1$. Existence et unicité de la solution.

Proposition (Fonction exponentielle exp). Il existe une **unique** fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on ait } f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad (\star).$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée $\exp : x \mapsto \exp(x)$.

Nous admettrons l'existence d'une telle fonction. Pour montrer qu'elle est unique, nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant :

Proposition (Lemme). Soit f une fonction vérifiant la condition $(\star)$. Alors, pour tout réel x , on a

$$f(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Démonstration. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$. Montrons que cette fonction est constante égale à 1 : f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $x \mapsto f(-x)$ (vue comme composée de la fonction $x \mapsto -x$ suivie de la fonction f). Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

l'avant dernière égalité venant du fait que $f' = f$.

Par conséquent, g' est identiquement nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(0)^2 = 1$.

Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$. On aurait alors $g(x_0) = 0$ ce qui contredirait le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = 1$. $\square$

Preuve de l'unicité de la fonction f vérifiant $(\star)$. Supposons qu'il existe une autre fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions $(\star)$.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g(x)f(-x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = g'(x)f(-x) + g(x)(-f'(-x)) = g(x)f(-x) - g(x)f(-x) = 0.$$

Par conséquent, h est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x) = h(0) = g(0)h(0) = 1.$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x)f(-x) = 1 \quad \text{d'où, d'après le lemme} \quad g(x) = \frac{1}{f(-x)} = f(x).$$

Les fonctions f et g sont égales et donc l'unicité est démontrée. $\square$

☞ **Remarques.** Il découle immédiatement du lemme et du TVI que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$. En effet, s'il existait un réel a tel que $\exp(a) < 0$, on aurait alors

$$\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(a) < 0$$

et donc, par le TVI (la fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque dérivable sur $\mathbb{R}$), il existerait un réel x_0 tel que $\exp(x_0) = 0$ ce qui est en contradiction avec le lemme.

Proposition (Bilan). La fonction exponentielle, noté $\exp$,

- ✓ est définie, dérivable et continue sur $\mathbb{R}$
- ✓ vérifie $\exp(0) = 1$

- ✓ vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$
- ✓ a pour dérivée elle-même : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$

B Propriétés de la fonction exponentielle $\exp$.

Règles de calculs sur $\exp$ et conséquences

Proposition (Exponentielle d'une somme). Pour tous réels a, b , on a

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Démonstration. Sur cours manuscrit

□

RCC

Conséquence (Exponentielle de l'opposé et d'une différence). Pour tous réels a et b , on a

$$\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)} \quad \text{et} \quad \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

Démonstration. Sur cours manuscrit

□

RCC

Conséquence. Pour tout entier relatif n , on a

$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n.$$

Démonstration. Sur cours manuscrit

□

RCC

Notation e^x

✓ On sait que l'image de 1 par la fonction exponentielle est le nombre réel $\exp(1) = e \simeq 2,718281828...^1$

✓ D'autre part, nous avons vu que pour tout entier relatif n ,

$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n \quad \text{en particulier, pour } x = 1 \quad \exp(n) = (\exp(1))^n = e^n.$$

✓ La fonction exponentielle admet des propriétés calculatoires semblables à celle des puissances.

On étend alors la notation e^n à tout réel : $\exp(x) = e^x$. On lit "exponentielle de x " ou "e exposant x ". Avec cette nouvelle notation, les règles de calcul précédentes s'écrivent alors

Conséquence. On interprète les résultats précédents avec la notation e^x : $e^0 = 1$ $e^1 = e$ $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Pour tous réels a, b on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

Pour tout entier relatif n , on a

$$(e^x)^n = e^{nx}.$$

Exercice 1 **Simplification d'écriture.** Simplifier les écritures suivantes : $e^{2x} \times (e^{-x})^3$, $\frac{e^{4x}}{(e^x)^2 \times e}$, $\frac{e^{2x+4}}{e^{2x-1}}$.

Exercice 2 **Simplification d'écriture (bis).** Les trois questions sont indépendantes.

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

Montrer que f est une fonction constante.

2) Démontrer que pour tout réel x , on a

$$\frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

3) Démontrer que pour tout réel x , on a $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$.

4) Démontrer que pour tout réel x , on a

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. notation due à Léonhard EULER. Il montra que e est irrationnel.