TS1 – Correction des exercices à chercher en autonomie (Dénombrements)

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ **Ex 7 page 291. ($* * *$ points)** On dispose de 5 jetons numérotés de 1 à 5. On constitue à l'aide de ces jetons des nombres de trois chiffres. L'ORDRE est important : on raisonne avec des CASES

1) Nombres à trois chiffres que l'on peut créer :

> $\boxed{\text{Solution}}$ ici l'ordre a son importance : on dénombre
>
> $$5 \times 4 \times 3 = 60$$
>
> nombres de trois chiffres différents (5 choix pour le 1er jeton (centaines), une fois le premier choisi, plus que 4 choix possibles pour le second (dizaines), une fois les deux premiers choisis, plus que 3 choix possibles pour le dernier (unités). ✔

2) Nombres à trois chiffres inférieurs à 300 que l'on peut créer :

> $\boxed{\text{Solution}}$ De même l'ordre a son importance et nous avons que deux choix pour chiffre des centaines : 1 ou 2 (sinon notre entier est strict. supérieur à 300). On dénombre alors
>
> $$2 \times 4 \times 3 = 24$$
>
> nombres de trois chiffres inférieurs à 300 (deux choix pour les centaines, il reste 4 jetons pour les dizaines et 3 pour les unités) ✔

3) Nombres à trois chiffres pairs :

> $\boxed{\text{Solution}}$ Les nombres pairs comportent nécessairement 2 ou 4 comme chiffre des unités. Ce qui limite le choix pour les unités : 2 choix. Une fois le chiffre des unités fixé, il y a 4 choix pour les centaines et 3 pour les dizaines soit :
>
> $$2 \times 4 \times 3 = 24$$
>
> nombres pairs. ✔

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ **Ex 11 page 291 ($* * *$ points)** Sur un damier à 9 cases, on place trois jetons : un vert, un rouge et un bleu.

1) Etant donné que les trois jetons sont de couleurs différentes, l'ordre a son importance : par exemple, les damiers

J		
		R
V		

et

R		
		V
J		

ne sont pas identiques (alors qu'ils le seraient si les jetons étaient de la même couleur). Pour chaque jeton de couleur, il faut affecter un n° de case (parmi les neuf que l'on a à notre disposition). On raisonne par CASES :

Jeton rge		Jeton vert		Jeton jaune
9	×	8	×	7

soit 504 damiers distincts.

2) Etant donné l'équiprobabilité des issues, nous devons, au préalable, dénombrer les damiers pour lesquels les trois jetons sont alignés.

✎ Tout d'abord, il y a 8 façons d'aligner trois jetons (en dehors de toute considération de couleurs) : en effet, soit ils sont alignés en ligne (3 façons), soit ils sont alignés en colonne (3 façons) ou en diagonale (2 façons).

✎ Une fois le type d'alignement choisi, il y a $3! = 6$ façons d'ordonner nos trois jetons alignés. A titre d'exemple, sur la première ligne

J	V	R

J	R	V

R	J	V

R	V	J

V	R	J

V	J	R

✎ Il y a ainsi :

Choix de l'aligne-ment		Choix de l'ordre des jetons
8	×	6

soit $6 \times 8 = 48$ damiers où les trois jetons sont alignés.

Donc la probabilité p que les trois jetons sont alignés vaut :

$$p(A) = \frac{\text{nbre de damiers favorables}}{\text{nbre de damiers possibles}} = \frac{48}{504} = \frac{2}{21} \simeq 0{,}095.$$

3) Supposons maintenant que les jetons sont de couleur noire. Ainsi, remplir une grille revient à choisir trois emplacements parmi les 9 (l'ordre ne compte pas vu que les jetons sont de même couleur).

On dénombre ainsi $\binom{3}{9} = 84$ grilles distinctes.
Nous avons vu tout à l'heure qu'il y a 8 façons d'aligner trois jetons. Ici, nous ne distinguons par les façons d'ordonner les trois jetons sur une même ligne vu qu'ils sont identiques. Ainsi,
la probabilité p que les trois jetons sont alignés vaut :

$$p(A) = \frac{\text{nbre de damiers favorables}}{\text{nbre de damiers possibles}} = \frac{8}{84} = \frac{2}{21} \simeq 0{,}095.$$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ **Ex 24 page 292 ($* * *$ points)** On considère un jeu de 54 (52 + 2 jokers) cartes. On distribue une main de 5 cartes au joueur.

1) On compte $\binom{54}{5} = 3.162.510$ mains différentes (on prélève **simultanément** les 5 cartes : COMBINAISON).
2) Etant donné qu'on prélève les cinq cartes au hasard, il y a équiprobabilité des issues. Déterminons les probabilités suivantes :
   (a) A : "le joueur a cinq coeurs"

   Déterminons Card(A) autrement dit le nombre de mains de 5 cartes comptant exactement 5 coeurs. Dans un jeu de 54 cartes, il y a $52/4 = 13$ coeurs. Donc

   $$\text{Card(A)} = \binom{13}{5} = 1287$$

   Ainsi,

   $$p(A) = \frac{\text{Card(A)}}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1287}{3.162.510} = \frac{11}{27030} \simeq 4{,}07 \times 10^{-4}.$$

   (b) B : "le joueur a une couleur"

   ATTENTION ! ! ! ! Une couleur dans un jeu de carte désigne TREFLE ou PIQUE ou CARREAU ou COEUR et surtout pas NOIR/ROUGE !

   De la même façon, chacun des événements : "obtenir 5 trèfles" (A_1), "obtenir 5 piques" (A_2), "obtenir 5 carreaux" (A_3) a pour probabilité $\frac{11}{27030}$.
   Ainsi,
   $$p(B) = p(A \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p(A) + p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$$
   puisque les événements A, A_1, A_2 et A_3 sont 2 à 2 incompatibles d'où

   $$p(B) = 4 \times \frac{11}{27030} \simeq 0{,}001628.$$

   (c) C : "le joueur a une paire de deux et une paire de dames"

   Nous avons
   $$\text{Card(C)} = \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{52-8}{1} = 1584$$
   mains comportement exactement 2 deux, 2 dames et 1 carte qui n'est ni une dame, ni un deux.
   Par conséquent,
   $$p(C) = \frac{1584}{3.162.510} \simeq 5 \times 10^{-4}.$$

   (d) D : "le joueur a un full composé d'un brelan de rois et d'une paire de valets" autrement dit 3 rois et 2 valets.

   Nous avons
   $$\text{Card(D)} = \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 24$$
   mains comportement exactement 3 rois et 2 valets.
   Par conséquent,
   $$p(D) = \frac{24}{3.162.510} \simeq 7{,}59 \times 10^{-6}.$$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ **Ex 27 page 292 ($* * *$ points)** Une grille de loto comporte 49 cases. Une grille est valide lorsque 6 cases sont cochées. On dénombre ainsi $\binom{49}{6}$ grilles distinctes.

1) Déterminons le nombre de grilles comportant que des cases cochées paires. Dans la grille, il y a exactement 24 numéros pairs (puisqu'il n'y a pas de 50). Ainsi, il y a $\binom{24}{6}$ grilles ne comportant que des cases cochées paires. Ainsi, étant donné qu'il y a équiprobabilité des issues, la probabilité cherchée est

$$p_1 = \frac{\binom{24}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{19}{1974} = 0{,}009625.$$

2) Par le même raisonnement et étant donné que dans une grille, il y a 9 multiples de 5, la probabilité que le tirage comporte exactement deux multiples de 5 est

$$p_2 = \frac{\binom{9}{2} \times \binom{49-9}{4}}{\binom{49}{6}} \simeq 0{,}235.$$

En effet, il nous faut choisir deux multiples de 5 parmi les 9 multiples de 5 et 4 non multiples de 5 (parmi les 40 non multiples à notre disposition).

$\boxed{\text{Exercice 5}}$ **Ex nº 72 page 298 ($* * *$ points)**

1) Une urne contient 3 boules blanches et 1 noire. On tire deux boules **successivement** et **sans remise**.
On souhaite calculer la probabilité d'obtenir la boule noire au deuxième tirage.

Déterminons le nombre de tirages possibles :

Choix 1ère boule		Choix 2ème boule
4	$\times$	3

soit 12 tirages successifs et sans remise de deux boules possibles.

Déterminons le nombre de tirages successifs et sans remise dont la première boule est blanche et la seconde est noire :

Choix 1ère boule		2ème boule imposée : noire
3	$\times$	1

soit 3 tirages favorables. D'où la probabilité cherchée

$$p = \frac{\text{nbre de tirages favorables}}{\text{nbre de tirages possibles}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{\text{VRAI}}$

2) On rappelle qu'une paire est un ensemble de deux cartes de même valeur. Dans un jeu de 32 cartes, on dénombre, pour chaque valeur, $\binom{4}{2}$ paires possibles. Ainsi, étant donné qu'il y a 8 valeurs, on compte : $8 \times \binom{4}{2} = 48$ paires distinctes. La probabilité de tirer une paire en tirant simultanément deux cartes est donc

$$\frac{48}{\binom{32}{2}} = \frac{48}{496} = \frac{3}{31}.$$

$\boxed{\text{FAUX}}$

3) Il y a $\binom{49}{6}$ façons de cocher 6 numéro parmi les 49 soit environ 14 millions de grilles possibles.
$\boxed{\text{VRAI}}$

4) On lance trois dés. Pour simplifier le raisonnement, on peut leur attribuer chacune une couleur distincte : vert, noir, bleu (cela ne change absolument rien à la probabilité que nous devons calculer).

Déterminons le nombre de résultats possibles :

Résultat Dé vert		Résultat Dé noir		Résultat Dé bleu
6	$\times$	6	$\times$	6

soit $6^3 = 216$ triplets de résultats possibles.

Déterminons le triplets favorables : c-à-d les triplets comptant exactement un nombre pair.

✐ Pour cela, il nous faut, au préalable choisir la couleur du dé qui fera apparaître un nombre pair : 3 choix ✐ Une fois ce choix réalisé, il nous faut choisir le nombre pair qui apparaîtra sur ce dé : 3 choix (2, 4 ou 6) ✐ Ensuite il nous faut choisir un nº non pair sur chacun des dés non choisi en première étape : 3×3 choix $= 9$ choix.

Au final, nous avons $3 \times 3 \times 9 = 81$ triplets favorables. Ainsi, la probabilité d'obtenir exactement un nombre pair en lançant trois dés est

$$\frac{81}{216} = \frac{3}{8}.$$

$\boxed{\text{FAUX}}$ (*nous verrons une méthode plus immédiate plus tard dans l'année (en utilisant une loi binomiale)*)

$\boxed{\text{Exercice 6}}$ **nº 74 page 298 ($* * *$ points) Question de cours** : cf cours.
Néanmoins, je présente ici une autre méthode (par le calcul) pour démontrer cette identité. Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ avec n non nul. Démontrons que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Nous avons par définition

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!n!} = \binom{n}{k}.$$

Application
Une urne contient n boules blanches et n noires (n est un entier non nul). On tire simultanément n boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues.

1) Soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminons $p(X = k)$.

$$\begin{aligned} p(X=k) &= p(\text{“tirer } k \text{ boules noires parmi les } n \text{ boules prélevées dans l'urne”}) \\ &= p(\text{“prélever simultanément } k \text{ boules noires et } n-k \text{ boules blanches dans l'urne”}) \\ &= \frac{\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}. \end{aligned}$$

En effet, il y a $2n$ boules dans l'urnes dont n blanches et n noires. Ainsi,

$$p(X=k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}} \qquad \text{d'après la formule redémontrée}$$

2) Déduisons-en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ c'est-à-dire la valeur de

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

La difficulté est de faire le lien avec ce qui précéde. Nous savons que la somme des $p(X = k)$ pour k variant de 0 à n vaut 1. Ainsi, nous avons :

$$p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + \cdots + p(X=n) = 1$$

soit, en remplaçant les $p(X = k)$ par la formule précédente

$$\frac{\binom{n}{0}^2}{\binom{2n}{n}} + \frac{\binom{n}{1}^2}{\binom{2n}{n}} + \cdots + \frac{\binom{n}{n}^2}{\binom{2n}{n}} = 1$$

d'où

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = 1 \times \binom{2n}{n}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

That's all folks !