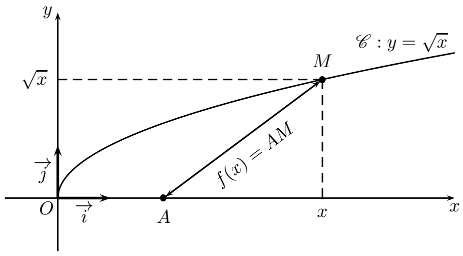
1S1 – Correction du DM nº 9

Exercice 1 **Distance d'un point à une courbe... (10 points)**

1) Déterminons l'expression de $f(x) = AM$ où M est le point d'abscisse x de $\mathscr{C}$.

Solution Etant donné un réel x positif ou nul, on considère M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$.



Etant donné que $M \in \mathscr{C}$, les coordonnées de M sont $(x; \sqrt{x})$. D'autre part, le point A a pour coordonnées $(2; 0)$. En repère orthonormé, la distance AM est donnée par

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

✔

2) Ecrire f comme une composée d'une fonction de référence et d'une fonction trinôme du second degré. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

Solution On a, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$f(x) = (u \circ v)(x) = u\left(v(x)\right)$$

où u et v sont définies par $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 - 3x + 4$.
Déterminons les tableaux de variations de v sur $[0; +\infty[$ (on souhaite étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$) et de u sur son domaine de définition $[0; +\infty[$:

u est une fonction de référence, la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. D'autre part, v est une fonction trinôme du second degré, sa courbe représentative est une parabole tournée vers le haut, cette fonction v admet son minimum en

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \qquad \text{et ce minimum vaut} \qquad f(x_0) = \frac{7}{4}.$$

x	0		$+\infty$
var. de $u : x \mapsto \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
var. de $v : x \mapsto x^2 - 3x + 4$	4	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	

- La fonction v est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ et prend ses valeurs dans $\left[\frac{7}{4}; 4\right]$. Sur l'intervalle $\left[\frac{7}{4}; 4\right]$, la fonction u est strictement croissante, donc, en vertu du théorème sur les variations des fonctions composées, $f = u \circ v$ est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.
- La fonction v est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et prend ses valeurs dans $\left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$. Sur l'intervalle $\left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$, la fonction u est strictement croissante, donc, en vertu du théorème sur les variations des fonctions composées, $f = u \circ v$ est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

On a ainsi le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
var. de $v : x \mapsto f(x) = (u \circ v)(x)$	$\sqrt{4} = 2$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$	$\nearrow$	

✔

3) En déduire les coordonnées du point M pour lequel la distance AM est minimale et préciser la valeur de ce minimum.

Solution D'après le tableau de variations précédent, la distance AM, c'est-à-dire la quantité $f(x)$ est minimale pour $x = \frac{3}{2}$. Le point M solution admet alors pour coordonnées $M\left(\frac{3}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. La distance minimale vaut alors $\sqrt{7}/2$. ✔

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ **Des ensembles de points... (8 points)** A et B sont deux points du plan.

1) (a) **Construction du barycentre G.**

$\boxed{\text{Solution}}$ Construisons le barycentre $G = \text{Bary}\begin{pmatrix} A & B \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour cela, soit on revient à la définition barycentrique puis Chasles, soit on utilise le théorème de réduction, dans tout les cas, on montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (ou encore que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$). ✔

(b) **Réduction de la somme vectorielle $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.**

$\boxed{\text{Solution}}$ Soit M un point du plan, par le théorème de réduction, nous obtenons $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2+1)\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$. ✔

2) (a) **Ensemble** $\mathscr{E}_1 = \{M \in \mathscr{P}$ **tq** $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ **et** $\overrightarrow{AB}$ **soient colinéaires**$\}$

$\boxed{\text{Solution}}$

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{E}_1 &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{0} \text{ ou } M \neq G \text{ avec } (MG)//(AB) \\
&\Leftrightarrow M = G \text{ ou } M \neq G \text{ avec } (MG)//(AB) \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient à la parallèle à } (AB) \text{ passant par G}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{E}_1$ est la parallèle à (AB) passant par G or $G \in (AB)$ étant donné qu'il est barycentre de A et B donc $\mathscr{E}_1 = (AB)$ ✔

(b) **Ensemble** $\mathscr{E}_2 = \{M \in \mathscr{P}$ **tq** $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = AB\}$

$\boxed{\text{Solution}}$

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{E}_2 &\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = AB \\
&\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = AB \\
&\Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = AB \\
&\Leftrightarrow 3MG = AB \\
&\Leftrightarrow MG = \frac{1}{3}AB \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de centre } G \text{ et de rayon } \frac{1}{3}AB
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{E}_2$ est le cercle de centre G passant par A. ✔

(c) **Ensemble** $\mathscr{E}_3 = \{M \in \mathscr{P}$ **tq** $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3MA\}$

$\boxed{\text{Solution}}$

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{E}_3 &\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3MA \\
&\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 3MA \\
&\Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = 3MA \\
&\Leftrightarrow 3MG = 3MA \\
&\Leftrightarrow MG = MA \\
&\Leftrightarrow M \text{ est équidistant de } A \text{ et } G
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{E}_3$ est la médiatrice du segment $[AG]$. ✔

(d) **Construction des ensembles $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$**